

Optimal Groundwater Policy in the Presence of Farmers' Productivity Investment: A Dynamic Game Approach

Maryam Asghari¹
Mehdi Fadaee²

Received: 21/Dec/2025 | Accepted: 30/Dec/2025

Abstract In many arid and semi-arid regions, shared groundwater aquifers play a crucial role in sustaining agricultural production, while the absence of effective institutions has exacerbated over-extraction and groundwater depletion. This paper develops a theoretical framework to analyze the interaction between local policy-making, investment in efficiency, and informal water trading. The model is formulated as a dynamic, sequential game with complete information among three players: a local planner, a high-productivity farmer, and a low-productivity farmer. The local planner determines groundwater extraction quotas to maximize discounted social welfare; the low-productivity farmer sells part of his quota in an informal market; and the high-productivity farmer dynamically decides on the level of investment in productivity-enhancing technologies. The dynamics of capital accumulation and groundwater levels are modeled through differential equations, and the game equilibrium is derived using Pontryagin's Maximum Principle and backward induction. The results indicate that investment in productivity not only increases private profits but also contributes to aquifer sustainability by reducing water demand. Moreover, institutional and environmental parameters—such as the discount rate, aquifer recharge (or permeability) coefficient, and the valuation of environmental externalities—play a decisive role in determining optimal water allocation policies. The findings underscore the necessity of coordinating water allocation policies with investment incentives for water-efficient technologies.

Keywords: Groundwater, Dynamic Game, Optimal Control, Productivity Investment, Water Market, Local Planner.

JEL Classification: C73, Q20, Q25.

1. M.S in Socio-Economic Systems, Institute for Management and Planning Studies, Tehran, Iran.

2. Associate Professor, Department of Economics and Systems, Institute for Management and Planning Studies, Corresponding Author

سیاست‌گذاری بهینه آب زیرزمینی در حضور سرمایه‌گذاری بهره‌وری کشاورزان: یک رویکرد بازی پویا

مریم اصغری

کارشناس ارشد مهندسی سیستم‌های اقتصادی اجتماعی، مؤسسه عالی آموزش و پژوهش برنامه‌ریزی، تهران، ایران.

m.fadaee@imps.ac.ir

مهدی فدایی

دانشیار گروه اقتصاد و سیستم‌ها، مؤسسه عالی آموزش و پژوهش برنامه‌ریزی، تهران، ایران. (نویسنده مسئول)

مقاله پژوهشی

پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۰۹

دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۳۰

چکیده: در بسیاری از مناطق خشک و نیمه‌خشک، سفره‌های آب زیرزمینی مشترک نقش اساسی در تداوم تولید کشاورزی ایفا می‌کنند، درحالی‌که نبود نهادهای کارآمد، برداشت بی‌رویه و افت سطح آب را تشدید کرده است. این مقاله چهارچوبی نظری برای تحلیل تعامل میان سیاست‌گذاری محلی، سرمایه‌گذاری در بهره‌وری و مبادله غیررسمی آب ارائه می‌دهد. مدل به‌صورت یک بازی پویا، متوالی و با اطلاعات کامل میان سه بازیگر شامل برنامه‌ریز محلی، یک کشاورز با بهره‌وری بالا و یک کشاورز با بهره‌وری پایین طراحی شده است. برنامه‌ریز محلی با هدف بیشینه‌سازی رفاه اجتماعی توزیع شده، میزان سهمیه آب زیرزمینی را تعیین می‌کند؛ کشاورز کم‌بهره بخشی از سهمیه خود را در بازار غیررسمی به فروش می‌رساند؛ و کشاورز پربهره به‌طور پویا درباره میزان سرمایه‌گذاری در بهبود بهره‌وری تصمیم می‌گیرد. پویایی انباشت سرمایه و سطح آب زیرزمینی از طریق معادلات دیفرانسیلی مدل‌سازی شده و تعادل بازی با استفاده از اصل حداکثرسازی پنتریاگین و روش استدلال معکوس استخراج می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که سرمایه‌گذاری در بهره‌وری، علاوه بر افزایش سود خصوصی، از طریق کاهش تقاضای آب، بر پایداری سفره آب نیز اثرگذار است. همچنین مؤلفه‌های نهادی و زیست‌محیطی نظیر نرخ تنزیل، ضریب نفوذپذیری آب و ارزش اثرهای خارجی زیست‌محیطی نقش تعیین‌کننده‌ای در سیاست بهینه تخصیص آب دارند. یافته‌ها بر ضرورت هم‌زمانی سیاست‌های تخصیص آب و مشوق‌های سرمایه‌گذاری در فناوری‌های بهره‌ور تأکید می‌کنند.

کلیدواژه‌ها: آب زیرزمینی، بازی پویا، کنترل بهینه، سرمایه‌گذاری بهره‌وری، بازار آب، برنامه‌ریز محلی.

طبقه‌بندی JEL: Q25, Q20, C73

مقدمه

آب به‌ویژه در بخش کشاورزی، یکی از نهاده‌های اساسی تولید و عامل کلیدی توسعه اقتصادی در بسیاری از کشورها به‌شمار می‌رود. در مناطق خشک و نیمه‌خشک، محدودیت دسترسی به منابع آب تجدیدپذیر، نقش آب زیرزمینی را در تداوم فعالیت‌های کشاورزی برجسته‌تر کرده است. با این حال، ویژگی‌های فیزیکی و نهادی منابع آب زیرزمینی، به‌ویژه زمانی که به‌صورت مشترک و با دسترسی محدود تنظیم‌نشده مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرند، زمینه بروز استخراج بی‌رویه و کاهش پایدار سطح آب را فراهم می‌کند.

در کشورهایی مانند ایران که بخش عمده‌ای از مصرف آب در کشاورزی متمرکز است، فشار فزاینده تقاضا در کنار محدودیت‌های طرف عرضه، امکان افزایش پایدار برداشت از منابع آب زیرزمینی را به‌شدت محدود کرده است. از این‌رو، رویکردهای مبتنی بر افزایش عرضه، به‌دلیل هزینه‌های بالا و ظرفیت محدود منابع، کارایی خود را از دست داده و توجه سیاست‌گذاران به سمت مدیریت تقاضا و بهبود الگوی بهره‌برداری از منابع آب زیرزمینی معطوف شده است. با این حال، موفقیت سیاست‌های مدیریت تقاضا، به‌شدت به ساختار نهادی، نحوه تخصیص آب و رفتار بهره‌برداران وابسته است.

منابع آب زیرزمینی مشترک واجد ویژگی‌های کلاسیک منابع با مالکیت مشترک هستند؛ به‌گونه‌ای که برداشت هر بهره‌بردار، مستقیماً بر امکان بهره‌برداری سایرین اثر می‌گذارد، در حالی که اعمال و حقوق بهره‌برداران به‌راحتی قابل پایش و اجرا نیست. در چنین شرایطی، رفتارهای فردی مبتنی بر حداکثرسازی منافع خصوصی می‌تواند به نتایجی منجر شود که با رفاه اجتماعی و پایداری منبع در تعارض است. این مسئله که در ادبیات اقتصادی با عنوان «تراژدی منابع مشترک» شناخته می‌شود، ضرورت طراحی سازوکارهای نهادی و سیاستی برای تنظیم بهره‌برداری از منابع آب زیرزمینی را برجسته می‌سازد.

در این چهارچوب، نقش نهادهای محلی و سیاست‌گذارانی که در تخصیص و سهمیه‌بندی آب دخالت می‌کنند، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. با این حال، در بسیاری از نظام‌های بهره‌برداری، بهره‌برداران از نظر بهره‌وری، فناوری و توانایی استفاده از آب همگن نیستند. این ناهمگنی می‌تواند به تعاملات راهبردی میان بهره‌برداران، از جمله مبادله غیررسمی آب، منجر شود و اثربخشی سیاست‌های سهمیه‌بندی یکنواخت را با چالش مواجه سازد. در چنین شرایطی، تحلیل رفتار بهره‌برداران بدون در نظر گرفتن ساختار بازی‌گونه و پویای تصمیم‌گیری، تصویر ناقصی از پیامدهای سیاست‌های مدیریت آب ارائه خواهد داد.

این مقاله با هدف پر کردن این خلأ، به بررسی اقتصادی بهره‌برداری از یک منبع آب زیرزمینی مشترک در چهارچوب یک بازی پویا و متوالی می‌پردازد. در مدل ارائه‌شده، سه بازیگر شامل یک برنامه‌ریز محلی و دو کشاورز با سطوح متفاوت بهره‌وری در نظر گرفته می‌شوند. برنامه‌ریز محلی با تعیین سهمیه آب، در پی حداکثرسازی رفاه اجتماعی است، درحالی‌که کشاورزان با توجه به محدودیت‌ها و تعاملات متقابل، تصمیم‌های بهینه خود را اتخاذ می‌کنند. ناهمگنی بهره‌وری کشاورزان این امکان را فراهم می‌کند که مبادله آب میان آن‌ها شکل گیرد و این موضوع به‌طور مستقیم بر سطح استخراج، سرمایه‌گذاری در بهبود بهره‌وری و پویایی سطح آب زیرزمینی اثر بگذارد.

سهم اصلی این پژوهش، تحلیل هم‌زمان نقش سهمیه‌بندی آب، ناهمگنی بهره‌وری و تعاملات راهبردی میان بهره‌برداران در قالب یک مدل کنترل بهینه و بازی پویا است. نتایج مطالعه نشان می‌دهد که سیاست‌های تخصیص آب، در غیاب توجه به تفاوت‌های بهره‌وری و رفتار راهبردی کشاورزان، ممکن است به پیامدهایی منجر شود که با اهداف پایداری منابع آب زیرزمینی در تعارض است. از این‌رو، یافته‌های مقاله می‌تواند دلالت‌های مهمی برای طراحی سیاست‌های مدیریت محلی آب و بهبود کارایی و پایداری بهره‌برداری از منابع آب زیرزمینی مشترک ارائه دهد.

پیشینه پژوهش

ادبیات اقتصادی مدیریت منابع آب زیرزمینی عمدتاً بر تحلیل پویای رفتار بهره‌برداران و پیامدهای نهادی و سیاستی استخراج آب از منابع مشترک متمرکز است. در این ادبیات، آب زیرزمینی به‌عنوان یک منبع با مالکیت مشترک و پویایی درون‌زا مدل‌سازی می‌شود که برداشت هر بهره‌بردار بر مسیر زمانی سطح آب و رفاه سایر بهره‌برداران اثر می‌گذارد.

مدل‌های پویای استخراج آب زیرزمینی و تراژدی منابع مشترک

مطالعات اولیه، از جمله **گیسر و سنچز**^۱ (۱۹۸۰) و **الن**^۲ (۱۹۸۴)، با استفاده از چهارچوب کنترل بهینه، رفتار بازار آزاد و راه‌حل بهینه اجتماعی در استخراج آب زیرزمینی را مقایسه کرده‌اند. نتایج این مطالعات نشان می‌دهد که در شرایطی که ظرفیت ذخیره‌سازی سفره آب زیرزمینی بزرگ باشد، تفاوت میان استخراج رقابتی و استخراج بهینه اجتماعی ممکن است از نظر کمی ناچیز باشد؛ پدیده‌ای

1. Gisser & Sanchez (1980)

2. Allen (1984)

که در ادبیات به «اثر گیسر-سنچز» معروف شده است. با این حال، این نتیجه به فروزی همچون همگنی بهره‌برداران، قطعیت در تغذیه طبیعی و ثبات تقاضا وابسته است.

در ادامه، پژوهش‌هایی مانند نگری^۱ (۱۹۸۹) و رابیو و کاسینو^۲ (۲۰۰۱) با تمایز میان راه‌حل‌های حلقه باز، حلقه بسته و نزدیک‌بین، نشان داده‌اند که در چهارچوب‌های واقع‌گرایانه‌تر که در آن بهره‌برداران تصمیم‌های خود را به‌صورت پویا و وابسته به سطح آب اتخاذ می‌کنند، استخراج رقابتی می‌تواند شامل اثرهای خارجی راهبردی باشد و سرعت بهره‌برداری بی‌رویه از منبع را افزایش دهد. این مطالعات بر اهمیت ساختار بازی و نحوه تعامل راهبردی بهره‌برداران در تعیین مسیر استخراج تأکید می‌کنند.

ناهمگنی بهره‌برداران و تعاملات راهبردی

بخش مهمی از ادبیات جدیدتر، ناهمگنی بهره‌برداران از نظر بهره‌وری، فناوری و هزینه‌های استخراج را وارد مدل‌های پویای آب زیرزمینی کرده است. لاکانن و کاندوروی^۳ (۲۰۰۶) نشان می‌دهند که وجود کشاورزان ناهمگن، به‌ویژه در حضور عدم قطعیت ناشی از بارندگی، می‌تواند تفاوت معناداری میان رفاه اجتماعی و نتایج استخراج رقابتی ایجاد کند. در چنین شرایطی، راه‌حل‌های رقابتی ممکن است به کاهش شدید سطح آب زیرزمینی و افت قابل توجه رفاه منجر شوند.

همچنین پژوهش‌هایی مانند السا مارتین^۴ (۲۰۱۲) با درون‌زا در نظر گرفتن تعداد بهره‌برداران، نشان می‌دهند که ناهمگنی و امکان ورود و خروج کشاورزان می‌تواند اثر گیسر-سنچز را تضعیف کرده و منافع بالقوه مدیریت بهینه منابع آب زیرزمینی را افزایش دهد. این نتایج بیانگر آن است که فروض ساده‌کننده در مورد همگنی بهره‌برداران ممکن است پیامدهای سیاستی گمراه‌کننده‌ای به همراه داشته باشد.

نقش سیاست‌گذار، سهمیه‌بندی و منابع جایگزین

بخش دیگری از ادبیات به بررسی نقش سیاست‌گذار و ابزارهای مدیریتی مانند سهمیه‌بندی،

1. Negri (1989)

2. Rubio & Casino (2001)

3. Laukkanen & Koundouri (2006)

4. Elsa Martin (2012)

تغذیه مصنوعی و استفاده از منابع جایگزین می‌پردازد. ازایز^۱ (۲۰۰۲) نشان می‌دهد که سیاست‌های بهینه تخصیص آب، به‌شدت به ارزش اقتصادی محصولات و وزندهی سیاست‌گذار به حفظ منابع آب زیرزمینی در طول زمان وابسته است. به‌طورمشابه، کاندوری و کریستو^۲ (۲۰۰۶) نشان می‌دهند که وجود منابع پشتیبان مانند آب‌شیرین‌کن می‌تواند اهمیت مدیریت پویای استخراج آب زیرزمینی را کاهش دهد، درحالی‌که در غیاب این منابع، مداخله سیاستی نقش کلیدی در حفظ رفاه اجتماعی ایفا می‌کند.

استفاده هم‌زمان از منابع آب و اثرهای متقابل فیزیکی

مطالعات دیگری به بررسی استفاده هم‌زمان از آب زیرزمینی و منابع جایگزین مانند آب باران پرداخته‌اند (Soubeyran *et al.*, 2014; Stahn & Tomini, 2016). این پژوهش‌ها نشان می‌دهند که تعامل فیزیکی میان منابع آب می‌تواند پیامدهای غیرمنتظره‌ای برای سطح آب زیرزمینی داشته باشد؛ به‌گونه‌ای که سیاست‌هایی مانند تشویق جمع‌آوری آب باران، در برخی شرایط، علی‌رغم کاهش فشار مستقیم بر سفره آب زیرزمینی، در بلندمدت به کاهش سطح آن منجر شود. این نتایج بر پیچیدگی طراحی سیاست‌های مدیریت آب و ضرورت در نظر گرفتن واکنش‌های رفتاری بهره‌برداران تأکید دارند.

جمع‌بندی و شکاف پژوهشی

مرور ادبیات نشان می‌دهد که اگرچه مدل‌های پویای متعددی برای تحلیل استخراج آب زیرزمینی توسعه یافته‌اند؛ اما بررسی هم‌زمان ناهمگنی بهره‌وری بهره‌برداران، سهمیه‌بندی آب توسط یک برنامه‌ریز محلی و تعاملات راهبردی میان کشاورزان همچنان محدود است. به‌ویژه، نقش مبادله آب میان کشاورزان ناهمگن و تأثیر آن بر تعادل بازی، مسیر استخراج و پویایی سطح آب زیرزمینی کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است.^۳

این مقاله با تمرکز بر این خلأ، یک چهارچوب بازی پویای سه‌عاملی ارائه می‌دهد که در آن اثر تفاوت بهره‌وری کشاورزان و سیاست سهمیه‌بندی آب بر تصمیم‌های بهینه، تعادل بازی و پایداری منابع آب زیرزمینی به‌صورت تحلیلی بررسی می‌شود.

1. Azaiez (2002)

2. Koundouri & Christou (2006)

۳. برای مطالعه بیشتر به (Zhou (2009), Knapp *et al.* (2003) و Kim & Schaible (2000) مراجعه شود.

مدل پژوهش و ساختار بازی

در این پژوهش، بهره‌برداری از یک منبع آب زیرزمینی مشترک در قالب یک بازی پویا و متوالی میان سه بازیگر شامل دو کشاورز و یک برنامه‌ریز محلی مدل‌سازی می‌شود. بازی به روش استدلال معکوس و تحت فرض اطلاعات کامل میان بازیگران حل می‌گردد.

برنامه‌ریز محلی به‌عنوان رهبر بازی، در مرحله نخست میزان سهمیه برداشت آب را که به‌صورت یکنواخت و با قیمتی واحد (یا رایگان) به هر دو کشاورز تخصیص داده می‌شود، تعیین می‌کند. در مرحله دوم، کشاورز i که دارای بهره‌وری پایین‌تر و ثابت در نظر گرفته شده است، درباره میزان فروش بخشی از سهمیه تخصیص‌یافته خود به کشاورز i تصمیم می‌گیرد. در مرحله نهایی، کشاورز i با بهره‌وری بالاتر، میزان سرمایه‌گذاری خود را برای بهبود بهره‌وری در طول زمان انتخاب می‌کند. فرض می‌شود محصولات تولیدی این دو کشاورز در بازار محلی مصرف نمی‌شود و قیمت محصول به‌صورت برون‌زا و مستقل از تصمیم‌های تولیدی تعیین می‌گردد.

پویایی مسئله ناشی از تغییرات زمانی سطح آب زیرزمینی و انباشت سرمایه کشاورز i است. برنامه‌ریز محلی با هدف حداکثرسازی رفاه اجتماعی تنزیل‌شده، تصمیم‌های خود را با در نظر گرفتن معادله پویای تحول سطح آب زیرزمینی اتخاذ می‌کند. هم‌زمان، کشاورز i سود تنزیل‌شده خود را با توجه به مسیر انباشت سرمایه حداکثر می‌سازد. در این چهارچوب، سهمیه آب تخصیص‌یافته و میزان سرمایه‌گذاری، به‌ترتیب متغیرهای کنترلی برنامه‌ریز محلی و کشاورز i محسوب می‌شوند.

مسئله برنامه‌ریز محلی و کشاورز i در قالب مسائل کنترل بهینه زمان پیوسته حل می‌شود، درحالی‌که تصمیم کشاورز i به‌صورت ایستا و در هر دوره با توجه به سهمیه تخصیص‌یافته اتخاذ می‌گردد. سطح آب زیرزمینی به‌عنوان متغیر وضعیت اجتماعی، تحت تأثیر برداشت کشاورزان کاهش یافته و از طریق تغذیه طبیعی ناشی از بارندگی و بازگشت بخشی از آب مصرف‌شده به سفره آب زیرزمینی افزایش می‌یابد. همچنین، انباشت سرمایه کشاورز i به‌عنوان متغیر وضعیت فردی، در اثر استهلاک کاهش یافته و از طریق سرمایه‌گذاری افزایش می‌یابد.

حل بازی با استفاده از اصول ماکسیم‌سازی پنتریاگین^۱ انجام می‌شود و تعادل حاصل، یک تعادل نش حلقه‌باز در یک بازی متوالی است که در آن راهبردهای بهینه بازیگران به‌صورت تابعی از زمان تعیین می‌گردند. این چهارچوب امکان تحلیل اثر سیاست سهمیه‌بندی آب و ناهمگنی بهره‌وری کشاورزان بر تصمیم‌های راهبردی، مسیر استخراج آب زیرزمینی و پایداری منبع را فراهم می‌کند.

حل مدل و استخراج تعادل

یک بازی پویا، متوالی و با اطلاعات کامل میان سه بازیگر شامل برنامه‌ریز محلی، کشاورز i و کشاورز j را در نظر می‌گیریم. ترتیب تصمیم‌گیری به شرح زیر است:

۱. برنامه‌ریز محلی میزان سهمیه آب زیرزمینی را که به هر کشاورز تخصیص می‌دهد تعیین می‌کند؛

۲. کشاورز i با توجه به سهمیه دریافتی، مقدار x_i از آب تخصیص‌یافته را برای فروش به کشاورز j انتخاب می‌کند؛

۳. کشاورز i با توجه به سهمیه آب و آب خریداری‌شده، میزان سرمایه‌گذاری $v(t)$ را برای بهبود بهره‌وری خود در طول زمان تعیین می‌کند.

از آنجا که سطح آب زیرزمینی و انباشت سرمایه در طول زمان تغییر می‌کنند، تصمیمات برنامه‌ریز محلی و کشاورز i به صورت پویا و با استفاده از ابزارهای کنترل بهینه مدل‌سازی می‌شوند، درحالی‌که تصمیم کشاورز j ماهیتی ایستا دارد. بازی به صورت استدلال معکوس^۱ حل می‌شود، در نتیجه ابتدا به حل مسئله کشاورز i می‌پردازیم.

۱. مسئله کشاورز

کشاورز i در این بازی دارای اطلاعات کامل^۲ است؛ زیرا ابتدا هم سهمیه تخصیص یافته توسط برنامه‌ریز را مشاهده می‌کند و هم تصمیم میزان فروش کشاورز i را می‌بیند؛ بنابراین، در پی آن است که جریان سود خود را در طول زمان بیشینه نماید.

بهره‌وری کشاورز i در هر دوره برابر با سطح انباشت سرمایه او، k_i ، فرض می‌شود:

$$\mu_i(t) = k(t)$$

تولید کشاورز i نیز به میزان بهره‌وری وی و نیز میزان آبی که در اختیار دارد وابسته است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_i(t) = \mu_i(t)(\bar{w} + x)$$

1. Backward Induction
2. Perfect Information

در نتیجه، تابع سود کشاورز i در دوره t برابر است با:

$$\pi_i(t) = p k(t)(\bar{w} + x) - k(t)x - \frac{mv(t)^2}{2} \quad (۱)$$

که در آن m ضریب هزینه سرمایه‌گذاری و p قیمت هر واحد محصول تولیدی است. این کشاورز در هر دوره تصمیم می‌گیرد که چه مقدار برای افزایش بهره‌وری‌اش سرمایه‌گذاری کند؛ یعنی جریان سرمایه‌اش چه قدر باشد. این سرمایه‌گذاری منجر به انباشت سرمایه طبق رابطه زیر می‌شود که در آن δ ضریب استهلاک سرمایه است.

$$\dot{k}(t) = v(t) - \delta k(t) \quad (۲)$$

با توجه به این رابطه، کشاورز i در پی آن است که سود تنزیل شده خود را بیشینه نماید. در نتیجه، با مسئله زیر مواجه است:

$$\begin{aligned} \max_{v(t)} & \int_0^{\infty} e^{-rt} \pi_i(t) dt \\ \text{s.t. } & \dot{k}(t) = v(t) - \delta k(t), k(0) = k_0 \end{aligned} \quad (۳)$$

این مسئله با استفاده از اصل حداکثرسازی پنتریاگین حل می‌شود و مقادیر پایدار^۱ تعادلی زیر به دست می‌آید. (جزئیات محاسبات در Appendix A ارائه شده است.)

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{-x + p(\bar{w} + x)}{m(\delta + r)} \\ k^* &= \frac{p\bar{w} - x + px}{\delta m(\delta + r)} \end{aligned} \quad (۴)$$

این روابط نشان می‌دهند که سرمایه‌گذاری و انباشت سرمایه کشاورز i به‌طور مستقیم تحت تأثیر قیمت محصول، سهمیه آب و رفتار کشاورز i قرار دارند.

۲. مسئله کشاورز j

کشاورز بهره‌وری کم‌تری دارد و می‌تواند بخشی از سهمیه آب خود را به کشاورز i بفروشد. مسئله او ایستا است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\max_x \pi_j = p(\bar{w} - x) + \mu_i x \quad (۵)$$

با جایگذاری مقدار تعادلی بهره‌وری کشاورز i ، مقدار بهینه فروش آب شاورز j به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^* = \frac{\delta mp(\delta + r) - p\bar{w}}{2(p - 1)} \quad (6)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که فروش آب توسط کشاورز j تابعی از ساختار انگیزشی ایجاد شده توسط سرمایه گذاری کشاورز i است.

۳. مسئله برنامه ریز محلی

هدف برنامه ریز محلی تعیین میزان سهمیه آب زیرزمینی برای هر یک از کشاورزان به منظور بیشینه کردن رفاه اجتماعی است که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$W = \pi_i + \pi_j - C(h, \bar{w}) + \frac{sh^2}{2} \quad (7)$$

که در آن $C(h, \bar{w})$ هزینه استخراج آب زیرزمینی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(h, \bar{w}) = (c_0 - c_1 h) 2\bar{w}, \quad c_0, c_1 > 0$$

بر اساس این رابطه، هر چه سطح آب زیرزمینی، h ، پایین تر باشد، هزینه استخراج بیشتر می‌شود. در رابطه (۷)، $\frac{sh^2}{2}$ اثرهای خارجی مثبت بالا بودن سطح آب زیرزمینی را نشان می‌دهد و s ضریب این اثرهای خارجی مثبت است. تغییرات سطح آب زیرزمینی طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{h}(t) = R(t) + 2(g - 1)\bar{w}(t) \quad (8)$$

در این پژوهش سفره آبی با کف صاف و دیواره‌های ستونی در نظر گرفته می‌شود. تغییرات در سطح آب زیرزمینی در هر دوره از زمان با $\dot{h}(t)$ نشان داده می‌شود. $R(t)$ میزان بارش در هر دوره است که به صورت برون‌زا تعیین می‌شود و $g \in (0, 1)$ بیانگر بخشی از آبی است که به منظور آبیاری استخراج می‌شود و از طریق ریشه گیاهان و نفوذ در خاک به سفره آبی برمی‌گردد.

در نتیجه، برنامه ریز محلی با مسئله زیر مواجه خواهد بود:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{w}(t)} & \int_0^\infty e^{-rt} W(t) dt \\ \text{s.t. } & \dot{h}(t) = R + 2(g - 1)\bar{w}, h(0) = h_0 \end{aligned} \quad (9)$$

حل این مسئله نیز با اصل حداکثرسازی پنتریاگین انجام می‌شود که در Appendix B درج

شده است. در حالت پایدار تصمیم بهینه برنامه ریز محلی عبارت است از:

$$\bar{w}^* = \frac{R}{2(1-g)} \quad (۱۰)$$

که در آن سطح آب زیرزمینی تعادلی تنها به مؤلفه‌های هیدرولوژیکی (بارش و ضریب نفوذپذیری) وابسته و مستقل از قیمت محصول و رفتار کشاورزان است.

۴. تحلیل پایداری

پایداری تعادل از طریق بررسی دستگاه معادلات دینامیکی سرمایه و سطح آب انجام می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که تحت شرایط معمول (نرخ تنزیل و استهلاک مثبت و هزینه سرمایه‌گذاری صعودی)، تعادل استخراج‌شده پایدار زینی^۱ است؛ به این معنا که تنها یک مسیر بهینه وجود دارد که اقتصاد را به تعادل بلندمدت هدایت می‌کند. جزئیات بررسی پایداری در Appendix C آمده است.

تحلیل نتایج مدل

در این بخش، آثار تغییر مؤلفه‌های کلیدی مدل بر رفتار سرمایه‌گذاری کشاورز i ، میزان انباشت سرمایه‌وی، مقدار فروش آب توسط کشاورز i ، سیاست تخصیص آب برنامه ریز محلی و در نهایت سطح تعادلی آب زیرزمینی بررسی می‌شود. تحلیل بر پایه مقادیر تعادلی استخراج‌شده در بخش قبل انجام می‌گیرد و نتایج آن از منظر اقتصادی تفسیر می‌شود.

تحلیل مقایسه‌ای سرمایه‌گذاری کشاورز i

مقدار تعادلی سرمایه‌گذاری کشاورز i به صورت زیر به دست آمد:

$$v^* = \frac{-x + p(\bar{w} + x)}{m(\delta + r)}$$

با جایگذاری مقدار تعادلی x^* و $\bar{w}^*$ ، رابطه نهایی سرمایه‌گذاری به شکل زیر قابل بیان است:

$$v^* = \frac{p}{4} \left(2\delta - \frac{R}{(1-g)m(\delta + r)} \right)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تصمیم سرمایه‌گذاری کشاورز i حاصل برهم‌کنش میان بازده اقتصادی

محصول، شرایط طبیعی آب و هزینه‌های تعدیل سرمایه است. اثر قیمت محصول p در رابطه زیر نشان داده شده است:

$$\frac{\partial v^*}{\partial p} = \frac{\delta}{2} - \frac{R}{4(1-g)m(\delta+r)}$$

افزایش قیمت محصول، بازده نهایی سرمایه‌گذاری را افزایش می‌دهد و انگیزه کشاورز i برای بهبود بهره‌وری را تقویت می‌کند. اثر مثبت قیمت، تنها در صورتی تضعیف می‌شود که بارش و بازگشت آب بسیار بالا باشد؛ زیرا در این حالت، آب به‌عنوان نهاده ارزان‌تر در دسترس قرار می‌گیرد و نیاز به سرمایه‌گذاری فناورانه کاهش می‌یابد.

اثر بارش باران R نیز به صورت زیر است:

$$\frac{\partial v^*}{\partial R} = -\frac{p}{4(1-g)m(\delta+r)} < 0$$

افزایش بارش، دسترسی مستقیم به آب را افزایش می‌دهد و وابستگی کشاورز به بهره‌وری سرمایه‌بر را کاهش می‌دهد؛ بنابراین، سرمایه‌گذاری در فناوری‌های صرفه‌جویی آب کاهش می‌یابد. ضریب نفوذپذیری g طبق رابطه زیر، سطح سرمایه‌گذاری کشاورز i را متأثر می‌کند:

$$\frac{\partial v^*}{\partial g} = \frac{pR}{4(1-g)^2m(\delta+r)} > 0$$

افزایش g به‌معنای بازگشت بیشتر آب استخراج‌شده به سفره آب زیرزمینی است. این امر انگیزه برنامه‌ریز برای تخصیص آب بیشتر را افزایش می‌دهد و هم‌زمان، کشاورز i با چشم‌انداز دسترسی پایدارتر به آب، سرمایه‌گذاری بیشتری برای افزایش بهره‌وری انجام می‌دهد. هزینه سرمایه‌گذاری m نیز طبق انتظار رابطه‌ای منفی با سطح سرمایه‌گذاری دارد:

$$\frac{\partial v^*}{\partial m} < 0$$

افزایش هزینه تعدیل سرمایه، سرمایه‌گذاری را پرهزینه‌تر کرده و مستقیماً انگیزه کشاورز برای بهبود فناوری را کاهش می‌دهد.

افزایش نرخ استهلاک نیز، کشاورز را وادار می‌کند برای حفظ سطح بهره‌وری، سرمایه‌گذاری بیشتری انجام دهد. درمقابل، افزایش نرخ تنزیل باعث کوتاه‌نگری شده و ارزش منافع آتی سرمایه‌گذاری را کاهش می‌دهد؛ درنتیجه، سرمایه‌گذاری افت می‌کند.

مقدار تعادلی انباشت سرمایه برابر است با:

$$k^* = \frac{p}{4} \left(2 - \frac{R}{\delta(1-g)m(\delta+r)} \right)$$

رفتار k^* مشابه v^* است؛ اما اثرهای مؤلفه‌ها در اینجا انباشته می‌شوند. به‌طور خاص، افزایش قیمت محصول، انباشت سرمایه را افزایش می‌دهد. افزایش بارش، از مسیر کاهش نیاز به فناوری، انباشت سرمایه را کاهش می‌دهد. افزایش g و کاهش m ، انباشت سرمایه را تقویت می‌کند. همچنین، افزایش نرخ تنزیل، انباشت سرمایه را تضعیف می‌نماید. به‌طور کلی، انباشت سرمایه زمانی بیشینه می‌شود که کشاورز با سیگنال‌های قیمتی قوی و محدودیت نسبی منابع آب مواجه باشد.

فروش آب توسط کشاورز i

مقدار تعادلی فروش آب توسط کشاورز i به‌صورت زیر است:

$$x^* = \frac{pR}{2(1-g)(p-1)} + \frac{\delta mp(\delta+r)}{2(p-1)}$$

این رابطه نشان می‌دهد که فروش آب تابعی از هم شرایط طبیعی و هم تصمیمات فناورانه کشاورز i است. با افزایش قیمت محصول، کشاورز i ترجیح می‌دهد آب را خود مصرف کند و محصول بیشتری تولید نماید؛ بنابراین x^* کاهش می‌یابد. افزایش بارش، دسترسی بیشتر به آب را به همراه دارد و باعث کاهش انگیزه فروش می‌شود. همچنین، با افزایش هزینه سرمایه‌گذاری کشاورز i ، بهره‌وری او کاهش یافته و نیازش به آب افزایش می‌یابد، در نتیجه خرید آب از i بیشتر می‌شود؛ بنابراین، بازار غیررسمی آب میان کشاورزان به‌طور درون‌زا به سیاست‌های فناورانه و شرایط اقلیمی واکنش نشان می‌دهد.

سیاست تخصیص آب برنامه‌ریز محلی

برنامه‌ریز محلی در حالت پایدار مقدار زیر را به هر کشاورز تخصیص می‌دهد:

$$\bar{w}^* = \frac{R}{2(1-g)}$$

این نتیجه حائز اهمیت است؛ زیرا نشان می‌دهد تصمیم بهینه برنامه‌ریز صرفاً تابعی از مؤلفه‌های هیدرولوژیک است و به قیمت محصول یا رفتار کشاورزان وابسته نیست. افزایش بارش یا افزایش ضریب نفوذپذیری مستقیماً به تخصیص بیشتر آب منجر می‌شود.

سطح تعادلی آب زیرزمینی

رابطه سطح تعادلی آب زیرزمینی به دلیل غیرخطی بودن، به صورت بسته قابل تحلیل مؤلفه‌ای نیست؛ با این حال تحلیل عددی نشان می‌دهد افزایش قیمت محصول، سطح آب زیرزمینی را کاهش می‌دهد. همچنین، افزایش بارش و افزایش ارزش اثرهای خارجی زیست‌محیطی آب (S)، سطح آب را افزایش می‌دهد. در مقابل، افزایش نرخ تنزیل یا هزینه نهایی برداشت آب، به برداشت بیشتر و افت سطح آب منجر می‌شود. به علاوه، افزایش هزینه سرمایه‌گذاری کشاورز i ، از مسیر کاهش بهره‌وری، فشار بیشتری بر منابع آب وارد می‌کند.

در نهایت، نتایج مدل نشان می‌دهد که سرمایه‌گذاری فناورانه کشاورزان و سیاست تخصیص آب، مکمل یکدیگرند. سیاست‌هایی که هزینه سرمایه‌گذاری را کاهش داده و سیگنال‌های قیمتی صحیح ایجاد می‌کنند، نه تنها بهره‌وری کشاورزی را افزایش می‌دهند بلکه به حفظ منابع آب زیرزمینی نیز کمک می‌کنند. در مقابل، بی‌توجهی به انگیزه‌های سرمایه‌گذاری می‌تواند حتی در شرایط وفور نسبی آب، به تخریب منابع منجر شود.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف تحلیل تعاملات راهبردی میان بهره‌برداران منابع آب زیرزمینی و یک برنامه‌ریز محلی، یک چهارچوب بازی پویا و متوالی را برای مدیریت یک سفره آب مشترک ارائه کرد. در این چهارچوب، سه بازیگر شامل برنامه‌ریز محلی، کشاورز با بهره‌وری پایین‌تر و کشاورز با بهره‌وری بالاتر در قالب یک مدل بازی سه مرحله‌ای تصمیم‌گیری می‌کنند. ویژگی متمایز مدل حاضر، درون‌زا بودن بهره‌وری کشاورز i از طریق انباشت سرمایه و همچنین امکان مبادله آب میان کشاورزان است که کانال جدیدی از تعاملات اقتصادی را در مدیریت منابع آب معرفی می‌کند.

نتایج مدل نشان می‌دهد که سرمایه‌گذاری در بهبود بهره‌وری نقش محوری در تعیین الگوی استخراج و تخصیص آب ایفا می‌کند. کشاورز i با در نظر گرفتن قیمت محصول، سهمیه آب دریافتی و رفتار فروش آب توسط کشاورز j ، به صورت پویا درباره میزان سرمایه‌گذاری خود تصمیم می‌گیرد. افزایش قیمت محصول و بهبود شرایط هیدرولوژیکی (افزایش بارش یا ضریب نفوذپذیری) انگیزه سرمایه‌گذاری را تقویت می‌کند، در حالی که افزایش هزینه سرمایه‌گذاری، نرخ تنزیل و نرخ استهلاک سرمایه، سرمایه‌گذاری بهینه را کاهش می‌دهد. این نتایج به روشنی نشان می‌دهند که سیاست‌های مؤثر بر هزینه سرمایه و افق زمانی تصمیم‌گیری کشاورزان، تأثیر مستقیمی بر بهره‌وری و در نهایت بر

فشار وارد بر منابع آب زیرزمینی دارند.

در سطح تعامل میان کشاورزان، مدل نشان می‌دهد که بازار غیررسمی یا نیمه‌رسمی آب می‌تواند به‌عنوان سازوکاری برای بازتخصیص آب از بهره‌برداران کم‌بازده به بهره‌برداران پربازده عمل کند. با این حال، این سازوکار کاملاً خنثی نیست؛ زیرا افزایش بهره‌وری کشاورز i ، ضمن کاهش نیاز او به آب، انگیزه کشاورز i برای فروش آب را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد. در نتیجه، حجم مبادله آب تابعی از ساختار انگیزشی ایجادشده توسط سرمایه‌گذاری و سیاست‌های بالادستی است، نه صرفاً کمبود فیزیکی آب.

در سطح کلان‌تر، تصمیم برنامه‌ریز محلی برای تخصیص سهمیه آب بر اساس بیشینه‌سازی رفاه اجتماعی، توازن میان منافع تولیدی، هزینه‌های استخراج و اثرهای خارجی زیست‌محیطی را منعکس می‌کند. نتیجه مهم مدل آن است که در حالت پایدار، سهمیه بهینه آب تنها تابعی از شرایط طبیعی (بارش و ضریب بازگشت آب) است و به‌طور مستقیم به رفتار فردی کشاورزان وابسته نیست. این یافته نشان می‌دهد که برنامه‌ریز محلی، در چهارچوب بهینه اجتماعی، نقش تثبیت‌کننده دارد و از واکنش‌های بیش‌ازحد به نوسانات رفتاری کوتاه‌مدت اجتناب می‌کند.

تحلیل پایداری نشان داد که تعادل به‌دست‌آمده از نوع پایدار زینی است؛ به این معنا که تنها یک مسیر بهینه وجود دارد که اقتصاد را به تعادل بلندمدت هدایت می‌کند. این ویژگی اهمیت سیاست‌گذاری صحیح در مراحل اولیه را برجسته می‌کند؛ زیرا انحراف از مسیر بهینه می‌تواند منجر به پویایی‌های ناپایدار و تخریب تدریجی منبع آب شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از حمایت و همکاری معنوی سردبیر محترم و داوران ناشناس پژوهشنامه اقتصاد و برنامه‌ریزی کمال تشکر را دارد.

منابع

- Allen, R. C., & Gisser, M. (1984). Competition versus optimal control in groundwater pumping when demand is nonlinear. *Water Resources Research*, 20(7), 752–756. <https://doi.org/10.1029/WR020i007p00752>
- Azaiez, M. N. (2002). A model for conjunctive use of ground and surface water with opportunity costs. *European Journal of Operational Research*, 143(3), 611–624. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00339-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00339-3)

- Gisser, M., & Sanchez, D. A. (1980). Competition versus optimal control in groundwater pumping. *Water resources research*, 16(4), 638-642.
- Kim, C. S., & Schaible, G. D. (2000). Economic benefits resulting from irrigation water use: Theory and an application to groundwater use. *Environmental and Resource Economics*, 17(1), 73-87. <https://doi.org/10.1023/A:1008340504971>
- Knapp, K. C., Weinberg, M., Howitt, R., & Posnikoff, J. F. (2003). Water transfers, agriculture, and groundwater management: A dynamic economic analysis. *Journal of Environmental Management*, 67(4), 291-301. [https://doi.org/10.1016/S0301-4797\(02\)00162-7](https://doi.org/10.1016/S0301-4797(02)00162-7)
- Koundouri, P., & Christou, C. (2006). Dynamic adaptation to resource scarcity and backstop availability: Theory and application to groundwater. *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, 50(2), 227-245. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8489.2006.00333.x>
- Laukkanen, M., & Koundouri, P. (2006). Competition versus cooperation in groundwater extraction: A stochastic framework with heterogeneous agents. Munich Personal RePEc Archive (MPRA Working Paper). <https://doi.org/10.4337/9781845429973.00016>
- Martin, E. (2012). Are the gains from a groundwater management policy so low? Working paper, UMR 1041 CESAER, AGRO SUP Dijon, France.
- Negri, D. H. (1989). The common property aquifer as a differential game. *Water Resources Research*, 25(1), 9-15. <https://doi.org/10.1029/WR025i001p00009>
- Rubio, S. J., & Casino, B. (2001). Competitive versus efficient extraction of a common property resource: The groundwater case. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(8), 1117-1137. [https://doi.org/10.1016/S0165-1889\(99\)00047-0](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(99)00047-0)
- Soubeyran, R., Tidball, M., Tomini, A., & Erdlenbruch, K. (2014). Rainwater harvesting and groundwater conservation: When endogenous heterogeneity matters. *Environmental and Resource Economics*. <https://doi.org/10.1007/s10640-014-9813-9>
- Stahn, H., & Tomini, A. (2016). On the environmental efficiency of water storage: The case of a conjunctive use of ground and rainwater. *Environmental Modeling & Assessment*. <https://doi.org/10.1007/s10666-016-9509-3>
- Zhou, Y. (2009). A critical review of groundwater budget myth, safe yield, and sustainability. *Journal of Hydrology*, 370(1-4), 207-213. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2009.03.009>

پیوست‌ها

پیوست A

در این پیوست، مسئله بهینه‌سازی پویا مربوط به کشاورز i حل می‌شود و مقادیر تعادلی سرمایه‌گذاری و انباشت سرمایه استخراج می‌گردد. کشاورز i با مشاهده کامل سهمیه آب تخصیص‌یافته توسط برنامه‌ریز محلی $\bar{W}$ و مقدار آب خریداری‌شده از کشاورز j ، یعنی x ، جریان سرمایه‌گذاری خود $v(t)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که سود تنزیل‌شده‌اش بیشینه شود. با توجه به مسئله (۳) که در مقاله ذکر شده است، معادله همیلتونی کشاورز i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{H}_i = p k(\bar{w} + x) - kx - \frac{mv^2}{2} + \lambda_i(v - \delta k)$$

که در آن $\lambda_i(t)$ متغیر قیمت سایه‌ای سرمایه است.

شرط لازم بهینگی نسبت به متغیر کنترلی v با توجه به شرایط مرتبه اول عبارت است از:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial v} = -mv + \lambda_i = 0$$

بنابراین:

$$\lambda_i = mv \quad A1$$

معادله هم‌وضعیت^۱ مطابق اصل حداکثرسازی پنتریاگین برابر است با:

$$\dot{\lambda}_i = r\lambda_i - \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial k}$$

مشتق همیلتونی نسبت به k برابر است با:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial k} = p(\bar{w} + x) - x - \delta\lambda_i$$

در نتیجه:

$$\dot{\lambda}_i = (r + \delta)\lambda_i - [p(\bar{w} + x) - x] \quad (A2)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (A1) نسبت به زمان داریم:

$$\dot{\lambda}_i = m\dot{v}$$

با جایگذاری در (A2) خواهیم داشت:

$$m\dot{v} = (r + \delta)mv - [p(\bar{w} + x) - x]$$

در نتیجه:

$$\dot{v} = (r + \delta)v - \frac{p(\bar{w} + x) - x}{m} \quad (A3)$$

در حالت پایدار، متغیرهای کنترلی و وضعیتی ثابت‌اند؛ بنابراین:

$$\dot{v} = 0, \dot{k} = 0$$

با استفاده از (A3):

$$(r + \delta)v^* - \frac{p(\bar{w} + x) - x}{m} = 0$$

که منجر می‌شود به:

$$v^* = \frac{p(\bar{w} + x) - x}{m(r + \delta)} \quad (A4)$$

از معادله حرکت سرمایه داریم:

$$v^* - \delta k^* = 0 \Rightarrow k^* = \frac{v^*}{\delta}$$

با جایگذاری در (A4):

$$k^* = \frac{p(\bar{w} + x) - x}{\delta m(r + \delta)} \quad (A5)$$

شرط تراگذاری برای افق زمانی نامحدود به صورت زیر برقرار است:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \lambda_i(t) k(t) = 0$$

با توجه به خطی بودن سیستم و مثبت بودن r و δ ، این شرط در مسیر تعادلی برقرار است.

در این پیوست نشان داده شد که مسئله پویا کشاورز i منجر به یک سیستم خطی از معادلات دیفرانسیلی می‌شود که دارای تعادل پایدار یکتاست. مقادیر تعادلی سرمایه گذاری و انباشت سرمایه به صورت بسته و صریح به دست آمدند و نشان می‌دهند که رفتار کشاورز j و سیاست تخصیص آب برنامه ریز محلی مستقیماً بر مسیر سرمایه گذاری و بهره‌وری کشاورز i اثر می‌گذارند.

پیوست B

در این پیوست، مراحل حل مسئله بهینه سازی پویا برنامه ریز محلی با استفاده از اصل حداکثر سازی پنتریاگین ارائه می‌شود. برنامه ریز محلی رفاه اجتماعی تنزیل شده را بیشینه می‌کند. معادله همیلتونی برنامه ریز محلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{H} = W(h, \bar{w}) + \lambda_h [R + 2(g - 1)\bar{w}]$$

که λ_h متغیر قیمت سایه ای آب زیرزمینی است. با جایگذاری تابع رفاه اجتماعی، همیلتونی به

شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\mathcal{H} = \pi_i + \pi_j - 2(c_0 - c_1 h) \bar{w} + \frac{sh^2}{2} + \lambda_h [R + 2(g - 1) \bar{w}]$$

شرط لازم بهینگی نسبت به متغیر کنترلی $\bar{w}$ عبارت است از:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{w}} = 0$$

که منجر می شود به:

$$-2(c_0 - c_1 h) + 2(g - 1)\lambda_h + \frac{\partial(\pi_i + \pi_j)}{\partial \bar{w}} = 0$$

در تعادل، اثر مستقیم تغییر $\bar{w}$ بر مجموع سود کشاورزان از طریق کانال تولید لحاظ شده و شرط فوق قابل حل برای λ_h است.

معادله هم وضعیت متناظر با $h(t)$ به صورت زیر است:

$$\dot{\lambda}_h = r\lambda_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}$$

که با محاسبه مشتق جزئی داریم:

$$\dot{\lambda}_h = r\lambda_h - (2c_1 \bar{w} + sh)$$

در حالت پایدار خواهیم داشت:

$$\dot{h} = 0, \dot{\lambda}_h = 0$$

که بلافاصله مقدار تعادلی سهمیه آب را به دست می دهد:

$$\bar{w}^* = \frac{R}{2(1 - g)}$$

این نتیجه نشان می دهد که در حالت پایدار، تصمیم برنامه ریز محلی تنها به مؤلفه های زیست محیطی آب وابسته است.

برای کامل بودن مسئله، شرط تراگذری به صورت زیر برقرار است:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \lambda_h(t) h(t) = 0$$

که تضمین می کند مسیر بهینه به یک تعادل بلندمدت محدود همگرا می شود.

در این پیوست سیاست بهینه استخراج آب در حالت پایدار به صورت بسته و شفاف به دست آمد و نشان داده شد تعادل بهینه اجتماعی از دید برنامه ریز محلی، استخراجی سازگار با ظرفیت بازتولید طبیعی سفره آب را القا می کند.

پیوست C

در این پیوست، پایداری تعادل استخراج‌شده برای بازیگران پویا، یعنی کشاورز i و برنامه‌ریز محلی، بررسی می‌شود. از آنجا که تصمیم کشاورز j ماهیتی ایستا دارد، در تحلیل پایداری وارد نمی‌شود.

پایداری مسئله کشاورز i

بر اساس حل مسئله کنترل بهینه کشاورز i (پیوست A)، دستگاه دینامیکی سرمایه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = v(t) - \delta k(t) \\ \dot{v}(t) = (\delta + r)v(t) + \frac{x - p(\bar{w} + x)}{m} \end{cases}$$

سیستم خطی‌شده حول تعادل (k^*, v^*) به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & 1 \\ 0 & \delta + r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ v - v^* \end{pmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین:

$$J_i = \begin{pmatrix} -\delta & 1 \\ 0 & \delta + r \end{pmatrix}$$

دارای مقادیر ویژه زیر است:

$$\lambda_1 = -\delta < 0, \lambda_2 = \delta + r > 0$$

که دارای یک مقدار ویژه منفی و یک مقدار ویژه مثبت است؛ بنابراین، تعادل کشاورز i پایدار زینی است. یعنی مسیرهای خارج از مسیر بهینه به سرعت از تعادل دور می‌شوند و تنها یک مسیر بهینه (مسیر زینی) وجود دارد که شرط تراگردی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) k(t) = 0$$

را ارضا می‌کند. این ویژگی با نظریه استاندارد سرمایه‌گذاری پویا در اقتصاد کاملاً سازگار است.

پایداری مسئله برنامه‌ریز محلی

بر اساس Appendix B، دستگاه دینامیکی سطح آب و قیمت سایه‌ای آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = R + 2(g - 1)\bar{w}(t) \\ \dot{\lambda}_h(t) = r\lambda_h(t) - sh(t) + 2c_1\bar{w}(t) \end{cases}$$

با جایگذاری قاعده بهینه استخراج آب در دستگاه دینامیکی، سیستم خطی شده حول (h^*, λ_h^*) به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{\lambda}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2(1-g)}{r} \\ -s & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h - h^* \\ \lambda_h - \lambda_h^* \end{pmatrix}$$

که $D > 0$ از شرایط مرتبه دوم به دست می آید.

دترمینان ماتریس ژاکوبین منفی است:

$$\det(J_{sp}) < 0$$

که دلالت بر وجود یک مقدار ویژه مثبت و یک مقدار ویژه منفی دارد. در نتیجه، تعادل استخراج

آب زیرزمینی توسط برنامه ریز محلی نیز پایدار زینی است و شرط تراگردی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_h(t) h(t) = 0$$

تنها روی مسیر بهینه برقرار می شود.

بنابراین، هر دو مسئله پویا دارای ساختار زینی هستند و وجود یک مسیر بهینه یکتا تضمین

می کند که نتایج تعادلی مقاله از نظر دینامیکی معتبرند. این ویژگی با ادبیات استاندارد بازی های پویا و استخراج منابع تجدیدپذیر کاملاً سازگار است.

نحوه ارجاع به مقاله:

اصغری، مریم و فدایی، مهدی (۱۴۰۴). سیاست‌گذاری بهینه آب زیرزمینی در حضور سرمایه‌گذاری بهره‌وری کشاورزان: یک رویکرد بازی پویا. *پژوهشنامه اقتصاد و برنامه‌ریزی*، ۳۰(۳)، ۵۷-۳۷

Asghari, M.& Fadaee, M. (2025) Optimal Groundwater Policy in the Presence of Farmers' Productivity Investment: A Dynamic Game Approach . *Economic and Planning Research*, 30(3). 37-57.

DOI: <https://doi.org/10.52547/eprij.30.3.37>

Copyrights:

Copyright for this article is retained by the author(s), with publication rights granted to Planning and Budgeting. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

